7　種々の方程式の問題

49

$x^3+(2m-7)x^2+(9-m)x-m-3=(x-1)\{x^2+2(m-3)x+m+3\}$ より，

$(x-1)\{x^2+2(m-3)x+m+3\}=0$

よって，$x^2+2(m-3)x+m+3=0$ が 1 以外の異なる 2 つの正の解をもてばよい。

この 2 つの解を $\alpha,\ \beta$ とすると，$\alpha+\beta>0,\ \alpha\beta>0$

よって，解と係数の関係より，$-2(m-3)>0$，$m+3>0$　$\therefore -3<m<3$　・・・①

判別式を D とすると，異なる 2 実数解をもつから，

$\frac{D}{4}=(m-3)^2-m+3=(m-1)(m-6)>0$　$\therefore m<1$ または $6<m$　・・・②

$x=1$ は解ではないから，$1+2(m-3)\cdot 1+m+3\neq 0$　$\therefore m\neq \frac{2}{3}$　・・・③

m は①，②，③を同時に満たすから，$-3<m<\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}<m<1$

50

(1)

$xyz\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=yz+xz+xy$　・・・①

$xyz\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=8\cdot\frac{7}{4}=14$　・・・②

①，②より，$xy+yz+zx=14$

(2)

$x,\ y,\ z$ は正の数だから $x+y+z>0$

また，$x^2+y^2+z^2=21$，$xy+yz+zx=14$

よって，

$$\begin{aligned}(x+y+z)^2&=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)\\&=21+2\cdot 14\\&=49\end{aligned}$$

$\therefore x+y+z=7$

(3)

$x+y+z=7$，$xy+yz+zx=14$，$xyz=8$ より，

x，y，z $(x\leq y\leq z)$ は t の 3 次方程式 $t^3-7t^2+14t-8=0$ の解である。

$t^3-7t^2+14t-8=(t-1)(t-2)(t-4)$ より，$(t-1)(t-2)(t-4)=0$

よって，$(x,\ y,\ z)=(1,\ 2,\ 4)$

51

虚数解を pi $(p \neq 0)$ とすると，$(pi)^3 - 3(pi)^2 + (1+a)pi + a = 0$

これと，

$$(pi)^3 - 3(pi)^2 + (1+a)pi + a = -p^3 i + 3p^2 + (1+a)pi + a$$
$$= 3p^2 + a - \{p^3 - (1+a)p\}i$$

より，

$3p^2 + a = 0$ ・・・①

$p^3 - (1+a)p = 0$ ・・・②

①より，$a = -3p^2$ ・・・③

これを②に代入し p について整理すると，$4p^3 - p = 0$ より，$4p\left(p^2 - \frac{1}{4}\right) = 0$

$p \neq 0$ より，$p^2 = \frac{1}{4}$

よって，③より，$a = -\frac{3}{4}$

52

(1)

$\sqrt{\frac{28}{27}} = p$ とおくと，

$$\alpha^3 = \left\{(p+1)^{\frac{1}{3}} - (p-1)^{\frac{1}{3}}\right\}^3$$
$$= \left\{(p+1)^{\frac{1}{3}}\right\}^3 - \left\{(p-1)^{\frac{1}{3}}\right\}^3 - 3\left\{(p+1)^{\frac{1}{3}}\right\}^2 (p-1)^{\frac{1}{3}} + 3(p+1)^{\frac{1}{3}}\left\{(p-1)^{\frac{1}{3}}\right\}^2$$
$$= (p+1) - (p-1) - 3(p+1)^{\frac{2}{3}}(p-1)^{\frac{1}{3}} + 3(p+1)^{\frac{1}{3}}(p-1)^{\frac{2}{3}}$$
$$= 2 - 3(p+1)^{\frac{1}{3}}(p-1)^{\frac{1}{3}}\left\{(p+1)^{\frac{1}{3}} - (p-1)^{\frac{1}{3}}\right\}$$
$$= 2 - 3(p^2 - 1)^{\frac{1}{3}}\alpha$$
$$= 2 - 3\left(\frac{28}{27} - 1\right)^{\frac{1}{3}}\alpha$$
$$= 2 - 3 \cdot \left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{3}}\alpha$$
$$= 2 - 3 \cdot \frac{1}{3}\alpha$$
$$= 2 - \alpha$$

よって，$\alpha^3 + \alpha - 2 = 0$

ゆえに，整数を係数とする 3 次方程式 $x^3 + x - 2 = 0$ は α を解にもつ。

(2)

$x^3+x-2=(x-1)(x^2+x+2)$ より，$(x-1)(x^2+x+2)=0 \quad \therefore x=1,\ \dfrac{-1\pm\sqrt{7}i}{2}$

α は $x^3+x-2=0$ の実数解だから，$\alpha=1$

53

$ab=2,\ a^3+b^3=6$ とおくと，

$x^3-6x+6=x^3-3abx+a^3+b^3$

$\quad=(x+a+b)(x+a\omega^2+b\omega)(x+a\omega+b\omega^2)$

より，方程式の解は $x=-(a+b),\ -a\omega-b\omega^2,\ -a\omega^2-b\omega$

ここで，$ab=2,\ a^3+b^3=6$ を満たす $a,\ b$ を求めると，$ab=2$ より，$a^3b^3=8$

よって，$a^3,\ b^3$ は方程式 $t^2-6t+8=0$ すなわち $(t-2)(t-4)=0$ の 2 解である。

ゆえに，$(a^3,\ b^3)=(\sqrt[3]{2},\ \sqrt[3]{4}),\ (\sqrt[3]{4},\ \sqrt[3]{2})$

よって，$x=-\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4},\ -\sqrt[3]{2}\omega^2-\sqrt[3]{4}\omega,\ -\sqrt[3]{2}\omega-\sqrt[3]{4}\omega^2$

補足

$$
\begin{aligned}
x^3-3abx+a^3+b^3 &= x^3+a^3+b^3-3abx \\
&=(x+a+b)(x^2+a^2+b^2-ax-bx-ab) \\
&=(x+a+b)\{x^2-(a+b)x+a^2+b^2-ab\} \\
&=(x+a+b)\left[x^2+\{a(\omega^2+\omega)+b(\omega^2+\omega)\}x+a^2\omega^3+b^2\omega^3+ab(\omega^2+\omega)\right] \\
&=(x+a+b)\left[x^2+(a\omega^2+a\omega+b\omega^2+b\omega)x+a^2\omega^2\cdot\omega+b^2\omega^2\cdot\omega+ab(\omega^2+\omega^4)\right] \\
&=(x+a+b)\left[x^2+(a\omega^2+a\omega+b\omega^2+b\omega)x+(a\omega^2+b\omega)(b\omega^2+a\omega)\right] \\
&=(x+a+b)\left[x^2+\{(a\omega^2+b\omega)+(b\omega^2+a\omega)\}x+(a\omega^2+b\omega)(b\omega^2+a\omega)\right] \\
&=(x+a+b)(x+a\omega^2+b\omega)(x+b\omega^2+a\omega)
\end{aligned}
$$

54

解法 1

条件より，$x^4+ax^3+bx^2+cx+3$ は $(x-1)(x-3)$ を因数にもつから，

$x^4+ax^3+bx^2+cx+3=(x-1)(x-3)(x^2+dx+1)$　・・・①　と表せ，

$(x-1)(x-3)(x^2+dx+1)=x^4+(d-4)x^3+(4-4d)x^2+(3d-4)x+3$ より，

$a=d-4$　・・・②

したがって，$x^4+ax^3+bx^2+cx+3=0$ の実数解が 1 と 3 だけになるのは，①より，

以下の場合が考えられ，それぞれの場合について，a の値の範囲を求めることにする。

(i) x^2+dx+1 と $(x-1)(x-3)$ が恒等式の場合

$(x-1)(x-3)=x^2-4x+3$ より，x^2+dx+1 と $(x-1)(x-3)$ は恒等式ではない。

よって，不適

(ii) x^2+dx+1 と $(x-1)^2$ が恒等式の場合

$(x-1)^2=x^2-2x+1$ より，$d=-2$

よって，②より，$a=-6$

(iii) x^2+dx+1 と $(x-3)^2$ が恒等式の場合

$(x-3)^2=x^2-6x+9$ より，x^2+dx+1 と $(x-3)^2$ は恒等式ではない。

よって，不適

(iv) $x^2+dx+1=0$ が実数解をもたない場合

判別式を D とすると，$D<0$

また，$D=d^2-4$ および②より，

$$\begin{aligned} D&=(a+4)^2-4\\ &=\{(a+4)+2\}\{(a+4)-2\}\\ &=(a+6)(a+2)\end{aligned}$$

よって，$(a+6)(a+2)<0$

ゆえに，整数 $a=-5,-4,-3$

以上より，$a=-6,-5,-4,-3$

よって，a の最大値と最小値は，それぞれ -3 と -6

解法 2

$P(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+3$ とすると，

条件より，$P(1)=a+b+c+4=0$　・・・①　$P(3)=27a+9b+3c+84=0$　・・・②

①，②から c を消去し，a と b の関係式を求めると，$4a+b=-12$　・・・③

$P(x)$ は $(x-1)(x-3)$ すなわち x^2-4x+3 を因数にもつから，

$P(x)=(x^2-4x+3)\{x^2+(a+4)x+4a+b+13\}$　・・・④

したがって，④より，$P(x)$ の実数解が 1 と 3 だけとなるのは，以下の場合が考えられ，それぞれの場合について，a の値の範囲を求めることにする。

(i) $x^2+(a+4)x+4a+b+13$ と x^2-4x+3 が恒等式の場合

$\begin{cases} a+4=-4 \\ 4a+b+13=3 \end{cases}$ より，$a=-8,\ b=22$

これは③を満たさないから不適

(ii) $x^2+(a+4)x+4a+b+13$ と $(x-1)^2$ が恒等式の場合

$x^2+(a+4)x+4a+b+13=x^2-2x+1$ より，$\begin{cases} a+4=-2 \\ 4a+b+13=1 \end{cases}$　$\therefore a=-6$，$b=12$

これは③を満たす。

よって，$a=-6$

(iii) $x^2+(a+4)x+4a+b+13$ と $(x-3)^2$ が恒等式の場合

$x^2+(a+4)x+4a+b+13=x^2-6x+9$ より，$\begin{cases} a+4=-6 \\ 4a+b+13=9 \end{cases}$　$\therefore a=-10$，$b=36$

これは③を満たさないから不適

(iv) $x^2+(a+4)x+4a+b+13=0$ が実数解をもたない場合

判別式を D とすると，$D<0$

また,
$D=(a+4)^2-4(4a+b+13)$ および③より,
$D=(a+4)^2-4(-12+13)$
$=a^2+8a+12$
$=(a+2)(a+6)$
よって，$(a+2)(a+6)<0$
ゆえに，$-6<a<-2$
これより，整数 $a=-5,\ -4,\ -3$
以上より，$a=-6,\ -5,\ -4,\ -3$
よって，a の最大値と最小値は，それぞれ -3 と -6

55

(1)

$f(f(x))-x=a\{f(x)\}^2-b-x$
$a\{f(x)\}^2-x-b$ の $f(x)-x$ で割ると,
$$
\begin{aligned}
a\{f(x)\}^2-x-b&=\{f(x)-x\}\{af(x)+ax\}+ax^2-b-x\\
&=a\{f(x)-x\}\{f(x)+x\}+f(x)-x\\
&=\{f(x)-x\}\{af(x)+ax+1\}
\end{aligned}
$$
よって，$f(f(x))-x=\{f(x)-x\}\{af(x)+ax+1\}$
ゆえに，$f(f(x))-x$ は $f(x)-x$ で割り切れる。

(2)

(1)より,
$$
\begin{aligned}
f(f(x))-x&=\{f(x)-x\}\{af(x)+ax+1\}\\
&=(ax^2-x-b)(a^2x^2+ax-ab+1)
\end{aligned}
$$
よって,
$f(f(x))-x=0$ が異なる 4 つの実数解をもつための必要十分条件は
$ax^2-x-b=0$ と $a^2x^2+ax-ab+1=0$ それぞれが異なる 2 実数解もち，かつ共通解をもたないことである。
異なる 2 実数解をもつための必要十分条件は判別式が正であることだから,
満たすべき条件は,
$ax^2-x-b=0$ では，判別式$=1+4ab>0$
$a>0,\ b>0$ より，$ax^2-x-b=0$ はこれを満たす。よって，異なる 2 実数解をもつ。
$a^2x^2+ax-ab+1=0$ では，判別式$=a^2-4a^2(-ab+1)=a^2(4ab-3)>0$
よって，$4ab-3>0$　すなわち $ab>\dfrac{3}{4}$　・・・①
$ax^2-x-b=0$ と $a^2x^2+ax-ab+1=0$ が共通解 α をもつとすると,
$a\alpha^2-\alpha-b=0$，$a^2\alpha^2+a\alpha-ab+1=0$，$a^2\alpha^2+a\alpha-ab+1=a(a\alpha^2-\alpha-b)+2a\alpha+1$

より，$2a\alpha+1=0 \quad \therefore \alpha=-\dfrac{1}{2a}$

これを$a\alpha^2-\alpha-b=0$に代入し，整理すると，$\dfrac{3}{4a}-b=0 \quad \therefore ab=\dfrac{3}{4}$

よって，共通解をもたない条件は$ab\neq\dfrac{3}{4}$　・・・②

①かつ②より，求める条件は$ab>\dfrac{3}{4}$

56

解法 1：解と係数の関係から求める

Aを$f(x)=0$の複素数解とすると，

$f(A)=A^3+aA^2+bA+c=0$

$$
\begin{aligned}
f(\overline{A})&=(\overline{A})^3+a(\overline{A})^2+b\overline{A}+c\\
&=\overline{A^3}=a\overline{A^2}+b\overline{A}+c\\
&=\overline{A^3+aA^2+bA+c}\\
&=\overline{0}\\
&=0
\end{aligned}
$$

よって，共役複素数$\overline{A}$も$f(x)$の解である。

また，Aが虚数ならば$A\neq\overline{A}$，実数ならば$A=\overline{A}$

これと 3 次方程式の複素数解の数は，重解を 2 つの解とすると，3 であることから，

$f(x)=0$は(B)より，互いに共役な 2 つの虚数解と 1 つの実数解をもつ。

そこで，1 つの虚数解を$p+qi$（p,qは実数，$q>0$）とおき，これをαとし，

実数解をβとすると，$f(x)=0$の解はαすなわち$p+qi$，$\overline{\alpha}$すなわち$p-qi$，βの 3 つ。

よって，解と係数の関係により，

$f(x)=x^3-(\alpha+\overline{\alpha}+\beta)x^2+(\alpha\overline{\alpha}+\overline{\alpha}\beta+\beta\alpha)x-\alpha\overline{\alpha}\beta$　・・・①

また，

$$
\begin{aligned}
\alpha^3&=(p+qi)^3=p^3+(qi)^3+3pqi(p+qi)\\
&=p^3-q^3i+3p^2qi-3pq^2\\
&=p(p^2-3q^2)+q(3p^2-q^2)i
\end{aligned}
$$

$(\overline{\alpha})^3=\overline{\alpha^3}=p(p^2-3q^2)-q(3p^2-q^2)i$

β^3は実数だから，条件より，$\beta^3=\beta \quad \therefore \beta=-1,\ 0,\ 1$　・・・②

α^3と$(\overline{\alpha})^3$については，

α^3と$(\overline{\alpha})^3$が実数ならば$\alpha^3=(\overline{\alpha})^3=\beta$

α^3と$(\overline{\alpha})^3$が虚数ならば（$\alpha^3=\alpha$かつ$(\overline{\alpha})^3=\overline{\alpha}$）または（$\alpha^3=\overline{\alpha}$かつ$(\overline{\alpha})^3=\alpha$）

そこで, 条件を満たす 3 次式を$\alpha^3=(\overline{\alpha})^3=\beta$, $\alpha^3=\alpha$ かつ $(\overline{\alpha})^3=\overline{\alpha}$, $\alpha^3=\overline{\alpha}$ かつ $(\overline{\alpha})^3=\alpha$ の 3 つの場合に分けて求めることにする。

$\alpha^3=(\overline{\alpha})^3=\beta$ の場合

虚部 $q(3p^2-q^2)=0\ (q>0)$ より，$3p^2-q^2=0\quad \therefore q^2=3p^2$　・・・③

これを実部 $p(p^2-3q^2)$ に代入すると，$-8p^3\quad \therefore -8p^3=\beta$

これと②より，$-8p^3=-1,\ 0,\ 1$

よって，$(\beta,\ p)=\left(-1,\ \dfrac{1}{2}\right),\ (0,\ 0),\ \left(1,\ -\dfrac{1}{2}\right)$

$(\beta,\ p)=\left(-1,\ \dfrac{1}{2}\right)$ のとき

③より，$q^2=\dfrac{3}{4}\quad \therefore q=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\ (\because q>0)$

よって，$(\alpha,\ \overline{\alpha},\ \beta)=\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i,\ \dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i,\ -1\right)$

これを①に代入し計算することにより，$f(x)=x^3+1$　・・・④

$(\beta,\ p)=(0,\ 0)$ のとき

②より，$q=0$ となり，$p\pm qi$ が虚数であることに反する。よって，不適。

$(\beta,\ p)=\left(1,\ -\dfrac{1}{2}\right)$ のとき

②より，$q^2=\dfrac{3}{4}\quad \therefore q=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

よって，$(\alpha,\ \overline{\alpha},\ \beta)=\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i,\ -\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i,\ 1\right)$

これを①に代入し計算することにより，$f(x)=x^3-1$　・・・⑤

$\alpha^3=\alpha$ かつ $(\overline{\alpha})^3=\overline{\alpha}$ の場合

$p=p(p^2-3q^2)$ かつ $q=q(3p^2-q^2)$ が成り立つ。

$p=p(p^2-3q^2)$ において，$p=0$ とすると，$q=q(3p^2-q^2)$ は $q=-q^3$ となる。

ところが $q>0$ より，$q=-q^3$ は成り立たない。よって，不適。

ゆえに，$p\neq 0$ で，このとき，$q\neq 0$ より，$p^2-3q^2=1$ かつ $3p^2-q^2=1\quad \therefore q^2=-\dfrac{1}{4}$

q は実数だから，不適。

$\alpha^3=\overline{\alpha}$ かつ $(\overline{\alpha})^3=\alpha$ の場合

$p=p(p^2-3q^2)$ かつ $-q=q(3p^2-q^2)$ が成り立つ。

$p=p(p^2-3q^2)$ において，

$p=0$ とすると，$-q=q(3p^2-q^2)$ より，$q=q^3\quad \therefore q=1\quad (\because q>0)$

これと②より，$(\alpha,\ \overline{\alpha},\ \beta)=(i,\ -i,\ -1),\ (i,\ -i,\ 0),\ (i,\ -i,\ 1)$

それぞれ①に代入し計算することにより，

$f(x)=x^3+x^2+x+1,\ x^3+x,\ x^3-x^2+x-1$ ・・・⑥

$p\neq 0$ とすると，$p^2-3q^2=1$ かつ $3p^2-q^2=-1$ $\therefore q^2=-\dfrac{1}{2}$

q は実数だから，不適。

よって，条件を満たす 3 次式は，④，⑤，⑥より，

$x^3+1,\ x^3-1,\ x^3+x,\ x^3+x^2+x+1,\ x^3-x^2+x-1$

解法 2：因数の積にして求める

A を $f(x)=0$ の複素数解とすると，

$f(A)=A^3+aA^2+bA+c=0$

$$
\begin{aligned}
f(\overline{A})&=(\overline{A})^3+a(\overline{A})^2+b\overline{A}+c\\
&=\overline{A^3}=a\overline{A^2}+b\overline{A}+c\\
&=\overline{A^3+aA^2+bA+c}\\
&=\overline{0}\\
&=0
\end{aligned}
$$

よって，共役複素数 $\overline{A}$ も $f(x)$ の解である。

また，A が虚数ならば $A\neq\overline{A}$，実数ならば $A=\overline{A}$

これと 3 次方程式の複素数解の数は，重解を 2 つの解とすると，3 であることから，

$f(x)=0$ は(B)より，互いに共役な 2 つの虚数解と 1 つの実数解をもつ。

そこで，虚数解を $\alpha,\ \overline{\alpha}$，実数解を β とすると，

β^3 は実数だから，条件より，$\beta^3=\beta$ $\therefore \beta=0,\ \pm 1$ ・・・①

α^3 と $(\overline{\alpha})^3$ については，

α^3 と $(\overline{\alpha})^3$ が実数ならば $\alpha^3=(\overline{\alpha})^3=\beta$

α^3 と $(\overline{\alpha})^3$ が虚数ならば（$\alpha^3=\alpha$ かつ $(\overline{\alpha})^3=\overline{\alpha}$）または（$\alpha^3=\overline{\alpha}$ かつ $(\overline{\alpha})^3=\alpha$）

そこで，条件を満たす 3 次式を $\alpha^3=(\overline{\alpha})^3=\beta$，$\alpha^3=\alpha$ かつ $(\overline{\alpha})^3=\overline{\alpha}$，$\alpha^3=\overline{\alpha}$ かつ $(\overline{\alpha})^3=\alpha$ の 3 つの場合に分けて求めることにする。

$\alpha^3=(\overline{\alpha})^3=\beta$ の場合

①より，$\beta=0,\ -1,\ 1$ だから，

$\beta=0$ のとき

$\alpha=\overline{\alpha}=0$ より，α が虚数であることに反するから不適。

$\beta=1$ のとき

$\alpha^3=1$ すなわち $\alpha^3-1=0$ より，$(\alpha-1)(\alpha^2+\alpha+1)=0$

$\alpha^2+\alpha+1=0$ の解は $\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$ だから，

$\alpha,\ \overline{\alpha}$ を解にもつ 2 次方程式は $x^2+x+1=0$

また，$\beta=1$ を解にもつ 1 次方程式は $x-1=0$

よって，これらを解にもつ 3 次方程式は $(x-1)(x^2+x+1)=0$

すなわち $x^3-1=0$ ・・・②

$\beta=-1$ のとき

$\beta=1$ のときと同様にして，3 次方程式は $x^3+1=0$ の解 ・・・③

$\alpha^3=\alpha,\ (\overline{\alpha})^3=\overline{\alpha}$ の場合

$\alpha^3-\alpha=\alpha(\alpha+1)(\alpha-1)=0$ より，$\alpha=0,\ \pm1$

α が虚数であることに反するから不適

$\alpha^3=\overline{\alpha},\ (\overline{\alpha})^3=\alpha$ の場合

$\dfrac{\alpha^3}{\alpha}=\dfrac{\overline{\alpha}}{(\overline{\alpha})^3}$ より，$\alpha^2=\dfrac{1}{(\overline{\alpha})^2}$

よって，$\alpha^2(\overline{\alpha})^2=1$ すなわち $(\alpha\overline{\alpha})^2=1$ $\quad\therefore\alpha\overline{\alpha}=\pm1$

ここで，$\alpha=p+qi$ （p,q は実数，$q\neq0$）とおくと，$\alpha\overline{\alpha}=p^2+q^2>0$

よって，$\alpha\overline{\alpha}=1$

よって，$\alpha^3=\overline{\alpha}$ を $\alpha^4=\alpha\overline{\alpha}$ と変形することにより，$\alpha^4=1$

これより，$(\alpha^2+1)(\alpha^2-1)=0$ $\quad\therefore\alpha=\pm i$

よって，$\alpha,\ \overline{\alpha}$ は $x^2+1=0$ の解

また，①より，β を解にもつ 1 次方程式は $x=0,\ x\pm1=0$

よって，条件を満たす 3 次方程式は $x(x^2+1)=0,\ (x\pm1)(x^2+1)=0$

すなわち $x^3+x=0,\ x^3+x^2+x+1=0,\ x^3-x^2+x-1=0$ ・・・④

以上より，条件を満たす 3 次式は，②，③，④より，

$x^3+1,\ x^3-1,\ x^3+x,\ x^3+x^2+x+1,\ x^3-x^2+x-1$